Évaluation 1	*1 heure*	13/09/2019 - TS2

Exercice 1 15 minutes 4 points

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite.
2. La suite (u_n) est-elle artihmétique ? Géométrique ? Justifier soigneusement.
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
4. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 2 20 minutes 3 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{4}$ et la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par : $\begin{cases} v_1 &= 3 \\ v_{n+1} &= f(v_n) \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1, 1 \leq v_n \leq 5$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq x$
3. Déduire des deux questions précédentes le sens de variations de la suite (v_n).

Exercice 3 15 minutes 3 points

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que l'inégalité suivante est vérifiée à partir d'un certain rang N que l'on déterminera :

$$6^n > 3^n + 4^n$$

On pourra se servir du fait que si $c > a$ et $d > b$, alors $c + d > a + b$.
Ainsi, par exemple, comme $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ et $\sqrt{6} > \sqrt{3}$, on a $\sqrt{5} + \sqrt{6} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Évaluation 1	*1 heure*	13/09/2019 - TS2

Exercice 1 15 minutes 4 points

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite.
2. La suite (u_n) est-elle artihmétique ? Géométrique ? Justifier soigneusement.
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
4. Démontrer cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 2 20 minutes 3 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{4}$ et la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par : $\begin{cases} v_1 &= 3 \\ v_{n+1} &= f(v_n) \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1, 1 \leq v_n \leq 5$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq x$
3. Déduire des deux questions précédentes le sens de variations de la suite (v_n).

Exercice 3 15 minutes 3 points

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que l'inégalité suivante est vérifiée à partir d'un certain rang N que l'on déterminera :

$$6^n > 3^n + 4^n$$

On pourra se servir du fait que si $c > a$ et $d > b$, alors $c + d > a + b$.
Ainsi, par exemple, comme $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ et $\sqrt{6} > \sqrt{3}$, on a $\sqrt{5} + \sqrt{6} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$