BAC BLANC DE MATHÉMATIQUES N°3

(Durée : 3 heures)

Exercice 1 : (5 points)

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Partie A

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie. Cette fonction f est définie sur $[1\,;26]$ par :

$$f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1\,;26]$, $f'(t) = 24\ln(t) - 6t + 24$.

2. Les variations de la fonction f' sont données dans le tableau suivant :

t	1		4		26
variations de $f'(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

a) Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1\,;\,26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

b) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1\,;\,26]$ et les variations de f sur $[1\,;\,26]$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur $[4\,;\,26]$, f' est décroissante. »

b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer. Justifier votre réponse.

Partie B

1. Montrer que la fonction $G(t) = 12t^2\ln(t) - 6t^2$ est une primitive sur $[1;26]$ de $g(t) = 24t\ln(t)$

2. En déduire une primitive F de la fonction f sur $[1;26]$

3. On a trouvé que $\dfrac{1}{26-1}\left[F(26) - F(1)\right] \approx 202$. Donner une interprétation de ce résultat dans le contexte du problème.

Exercice 2 : (5 points)

Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. **Proposition :** On a l'égalité
$$e^{5\ln(2)} \times e^{7\ln(4)} = 2^{19}$$

2. La courbe représentative d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[0\,;2]$ est donnée en Figure 1. La courbe représentative d'une de ses primitives, G, est donnée sur la Figure 2. La courbe représentative de G passe par les points A(0 ; 1), B(1 ; 1) et C(2 ; 5).

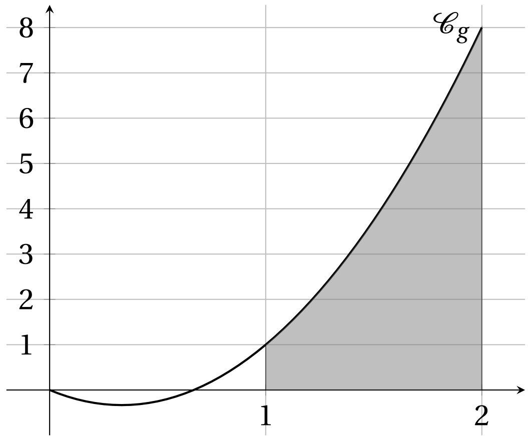


Figure 1

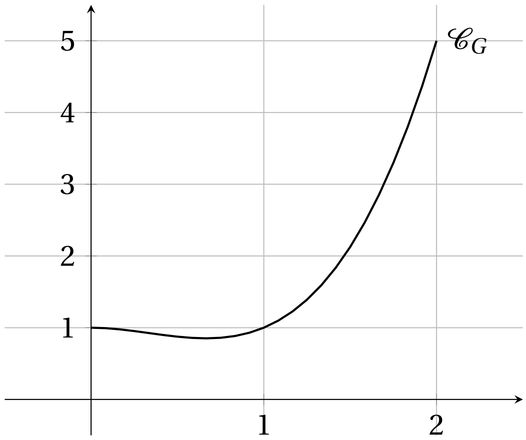
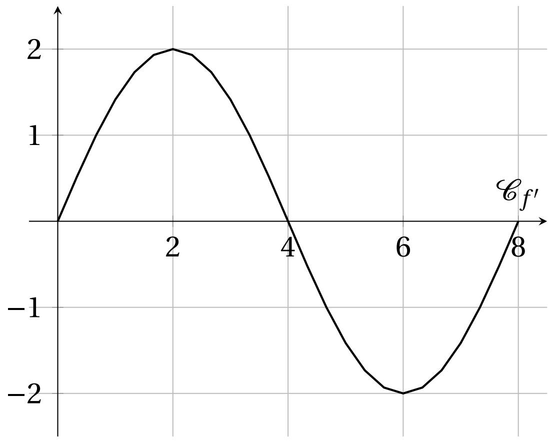


Figure 2

Proposition : La valeur exacte de l'aire de la partie grisée sous la courbe de g en Figure 1 est 4 unités d'aires.

3. On considère une fonction f, définie et dérivable sur $[0\,;8]$. La courbe représentative de sa dérivée f' est donnée sur la figure ci-dessous.



Proposition : f est convexe sur $[4\,;8]$

4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,4$.
Proposition : $P(X < 5) \approx 0,126$ (arrondi à 10^{-3} près)

5. Le chiffre d'affaires d'une entreprise a augmenté de 32,5% en 5 ans.
Proposition : Il a augmenté, en moyenne, de 6,5% par an.

Exercice 3 : (5 points)

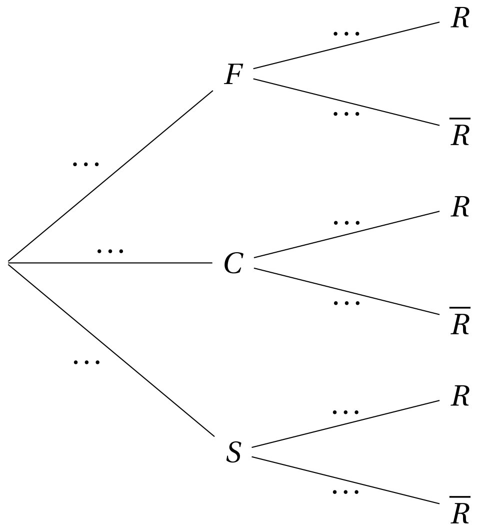
Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples. Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria. On note :
F : « la table est occupée par une famille »
S : « la table est occupée par une personne seule »
C : « la table est occupée par un couple »
R : « le serveur reçoit un pourboire »
On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A et $P_B(A)$ la probabilité de A, sachant B.

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $P(F)$ et $P_S(R)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. **a)** Calculer $P(F \cap R)$.
   b) Déterminer $P(R)$.
4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires.
On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.

Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2} près. Vous indiquerez sur votre copie la formule que vous avez rentrée dans votre calculatrice.

1. Calculer :
   a) La probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 €.
   b) $P(X \geqslant 20)$.
2. Calculer la probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 € sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 €.

Exercice 4 : (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On étudie les abonnements à un grand quotidien de 2011 à 2015.
Le tableau suivant indique, pour chaque année de 2011 à 2015, le nombre d'abonnés.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre d'abonnés	620 214	610 156	575 038	578 282	555 239
Taux d'évolution annuel		$-1,62\,\%$	$-5,76\,\%$	$0,56\,\%$	$-3,98\,\%$
Taux d'évolution par rapport à l'année 2011		$-1,62\,\%$	$-7,28\,\%$	$-6,76\,\%$	$-10,48\,\%$

Partie A

1. Retrouver par le calcul, le taux d'évolution annuel entre 2012 et 2013.
2. Calculer le taux d'évolution moyen annuel entre 2011 et 2015. Arrondir à 0,01% près.

Partie B

Afin d'étudier cette évolution, on suppose qu'à l'avenir, tous les ans, 10 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement à ce quotidien mais que l'on compte 52 milliers de nouveaux abonnés.
En 2011, le nombre d'abonnés est égal, après arrondi, à 620 milliers.
On s'intéresse, pour tout entier naturel n, au nombre d'abonnés, en milliers, pour l'année $(2011 + n)$.
On note u_n le nombre d'abonnés en milliers pour l'année $(2011 + n)$.
On fixe donc $u_0 = 620$.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2012 suivant ce modèle.
2. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,9u_n + 52$.
3. On définit la suite (v_n), pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 520$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme v_0.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 100 \times 0,9^n + 520$.
4. Le quotidien est considéré en difficulté financière lorsque le nombre d'abonnés est inférieur à 540 milliers.
   a) On souhaite déterminer au bout de combien d'années le quotidien est en difficulté financière.
   Recopier et compléter l'algorithme suivant pour que la variable N contienne ce nombre d'années après son exécution.

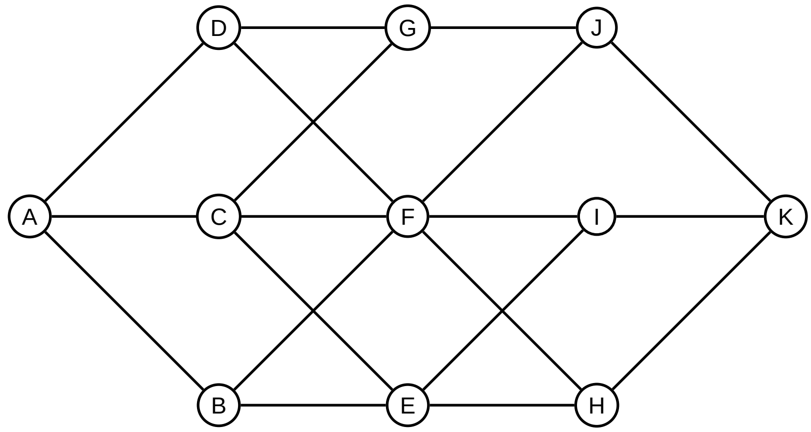
```
U ← ...
N ← 0
Tant Que U ...
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant Que
```

   b) On rappelle que $u_n = 100 \times 0,9^n + 520$. Résoudre l'inéquation $u_n \leqslant 540$
   c) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'énoncé.

<u>Exercice 4 :</u> (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous



1. En justifiant la réponse, dire si ce graphe admet une chaîne eulérienne.
   Si oui, donner une telle chaîne.
2. On considère la matrice M ci-après (a, b, c et d sont des nombres réels).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer les réels a, b, c et d pour que la matrice M représente la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathscr{G}$, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

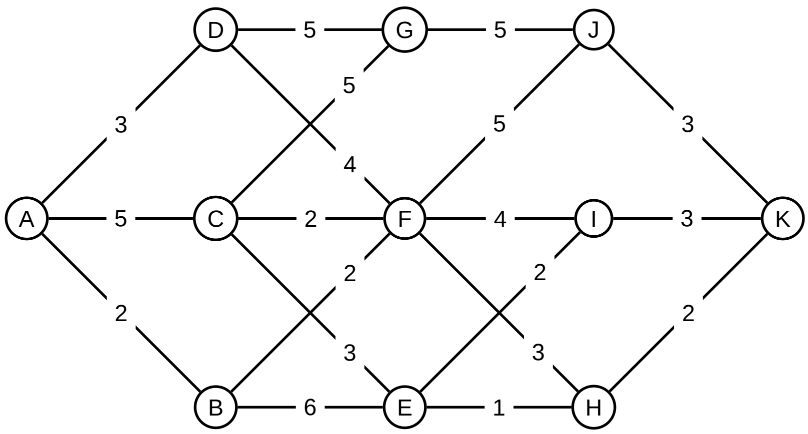
b) On donne

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 10 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 6 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 11 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 10 & 11 & 7 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & 16 & 12 & 0 & 0 & 0 & 13 & 13 & 12 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 13 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à J. Préciser ces chemins.

Partie B

On pondère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessus pour qu'il représente un réseau d'irrigation.



- Le sommet A correspond au départ d'eau, le sommet K au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.
- Les arêtes représentent les canaux d'irrigation.
- La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.

Déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau en A et le bassin d'infiltration en K et donner sa longueur. On justifiera la réponse à l'aide d'un algorithme.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DU BAC BLANC N°3

Exercice 1 : (5 points)

Partie A

1. f est dérivable sur [1 ;26] car c'est une somme et un produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour dériver le premier terme, $24t \ln t$, on applique la dérivée du produit :
Soit $u(t) = 24t$, et $v(t) = \ln t$. Alors, $u'(t) = 24$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'v + v'u - 3 \times 2t \\ &= 24 \times \ln t + \frac{1}{t} \times 24t - 6t \\ f'(t) &= 24\ln(t) - 6t + 24 \end{aligned}$$

2. **a)** On a $f'(1) = 24\ln(1) - 6 \times 1 + 24 = 18$; $f'(4) = 24\ln(4) - 6 \times 4 + 24 = 24\ln(4) > 0$; et $f'(26) = 24\ln(26) - 6 \times 26 + 24 \approx -53,8 < 0$.
Ainsi, sur $[1;4]$, d'après le tableau de variations, $f'(x) \geq f'(1) > 0$. En particulier $f'(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
Sur $[4;26]$: f' est continue, strictement décroissante, et $f'(4) > 0$ tandis que $f'(26) < 0$. Donc, d'après le théorème de la bijection, $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle.
A l'aide de la calculatrice, on trouve que $14 < \alpha < 15$

   b) On a donc le tableau de signes suivant :

t	1		α		26
signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
variations de $f(t)$		↗		↘	

3. **a)** Dire que f' est décroissante sur [4 ; 26] revient à dire que de moins en moins de personnes deviennent malade à partir de la 4e semaine.

   b) Le nombre de malades, donné par $f(t)$, commence à diminuer après α semaines, c'est-à-dire à partir de la 15e semaine.

Partie B

1. G est dérivable sur $[1;26]$ comme produit et somme de fonctions dérivables. Pour la dériver, on pose $u(t) = 12t^2$ et $v(t) = \ln(t)$. On a alors $u'(t) = 24t$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$. D'après la formule de la dérivée du produit, on a donc :

$$\begin{aligned} G'(t) &= u'v + v'u - 6 \times 2t \\ &= 24t\ln(t) + \frac{1}{t} \times 12t^2 - 6 \times 2t \\ &= 24t\ln(t) \end{aligned}$$

Ainsi, $G'(t) = g(t)$: G est bien une primitive de g sur [1 ;26].

2. Comme $f(t) = g(t) - 3t^2 + 10$, et que $-t^3 + 10t$ est une primitive de $-3t^2 + 10$, une primitive de f est :

$$\begin{aligned} F(t) &= G(t) - t^3 + 10t \\ &= 12t^2 \ln(t) - 6t^2 - t^3 + 10t \end{aligned}$$

3. $\dfrac{1}{26-1}\left[F(26) - F(1)\right] = \dfrac{1}{26-1}\int_1^{26} f(t)\,dt$: il s'agit de la valeur moyenne de f sur $[1\,;26]$
Dans le contexte du problème, cela signifie que, en moyenne, 202 personnes environ étaient malades chaque semaine.

Exercice 2 : (5 points)

1. VRAI :

$$\begin{aligned} e^{5\ln(2)} \times e^{7\ln(4)} &= 2^5 \times 4^7 \\ &= 2^5 \times (2^2)^7 \\ &= 2^5 \times 2^{2\times 7} \\ &= 2^{5+14} \\ &= 2^{19} \end{aligned}$$

2. VRAI : l'aire grisée vaut $\int_1^2 g(x)\,dx = G(2) - G(1) = 5 - 1 = 4$ unités d'aire.

3. FAUX : Dire que f est convexe revient à dire que f' est croissante. Or, d'après le graphique, f' est strictement décroissante sur $[4\,;6]$. Ainsi, f n'est pas convexe sur $[4\,;8]$

4. FAUX : $P(X < 5) = P(X \leq 4) = \text{binomFRép}(20{,}0.4{,}4) \approx 0,051$.
Remarque : En fait, $P(X \leq 5) \approx 0,126$

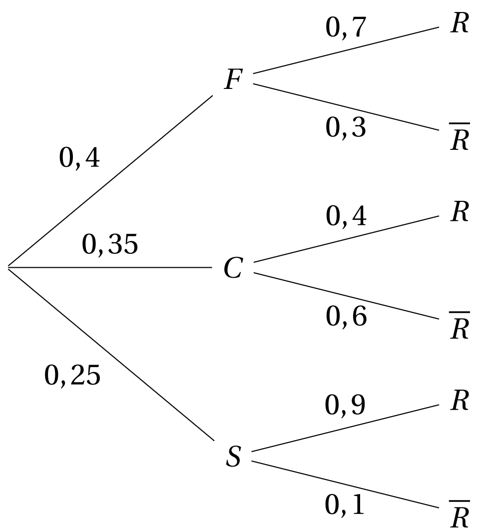
5. FAUX : une augmentation de 32,5% correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{32,5}{100} = 1,325$. Ainsi, l'évolution moyenne correspond à un coefficient multiplicateur de $1,325^{\frac{1}{5}} \approx 1,0579$, soit une augmentation moyenne de 5,79%.

Exercice 3 : (5 points)

Partie A

1. On a $P(F) = 0,4$ et $P_S(R) = 0,9$.

2. Voici l'arbre complété :



3. a) On a : $P(F \cap R) = P(F) \times P_F(R) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

b) F, C et S forment une partition de l'univers. Donc, d'après la formule de la probabilité totale, on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(F\cap R)+P(C\cap R)+P(S\cap R) \\ &= 0,4\times 0,7+0,35\times 0,4+0,25\times 0,9 \\ &= 0,645 \end{aligned}$$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$\begin{aligned} P_R(C) &= \frac{P(R\cap C)}{P(R)} \\ &= \frac{0,4\times 0,35}{0,645} \\ &\approx 0,217 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que le pourboire vienne d'un couple est de 0,217 environ.

Partie B

1. a) $P(6\leq X\leq 24)=$ NormalFRép(6,24,15,4.5) $\approx 0,95$

b) $P(X\geq 20)=$ NormalFRép(20,10ˆ99,15,4.5) $\approx 0,13$.

2. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$\begin{aligned} P_{6\leq X\leq 24}(X\geq 20) &= \frac{P(20\leq X\leq 24)}{P(6\leq X\leq 24)} \\ &= \frac{\text{NormalFRép(20,24,15,4.5)}}{\text{NormalFRép(6,24,15,4.5)}} \\ &\approx 0,12 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que les pourboires du serveur s'élèvent à un montant supérieur à 20 € sachant qu'ils sont compris entre 6 et 24 € est de 0,12 environ.

Exercice 4 : (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Le taux d'évolution est donné par :

$$\frac{\text{Valeur Finale - Valeur Initiale}}{\text{Valeur Initiale}} = \frac{575038 - 610156}{610156} \approx -0,0576$$

Ceci correspond à une baisse de 5,76%, comme indiqué dans le tableau.

2. De même, le taux d'évolution global entre 2011 et 2015 vaut $\dfrac{555239 - 620214}{620214} \approx -0,10148$, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - 0,10148 \approx 0,8952$.

Ainsi, l'évolution moyenne correspond à un coefficient multiplicateur de $0,8952^{\frac{1}{4}} \approx 0,9727$, c'est-à-dire une évolution moyenne annuelle de -2,73%

Partie B

1. La réduction de 10% correspond à une multiplication par $1 - \dfrac{10}{100} = 0,9$. Ainsi, avant de prendre en compte les nouveaux abonnés, il y a, en 2012, $0,9 \times 620 = 558$ milliers d'abonnés. En prenant compte des nouveaux abonnés, il y aura donc, en 2012 : $558 + 52 = 610$ milliers d'abonnés.

2. Le raisonnement de la question précédente reste valable, quel que soit le nombre initial d'abonnés. Ainsi, on a bien $u_{n+1} = 0,9u_n + 52$.

3. a) On a, pour tout n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 520 \\ &= 0,9u_n + 52 - 520 \\ &= 0,9u_n - 468 \\ &= 0,9\left(u_n - \frac{468}{0,9}\right) \\ &= 0,9(u_n - 520) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est bien une suite géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 520 = 620 - 520 = 100$.

b) On en déduit que

$$v_n = v_0 \times q^n = 100 \times 0,9^n$$

c) On en déduit que :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 520 \\ &= 100 \times 0,9^n + 520 \end{aligned}$$

4. a) Voici l'algorithme

```
U ← 620
N ← 0
Tant que U ≥ 540
    U ← 0,9 × U + 52
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

b) Il s'agit de résoudre :

$$\begin{aligned} u_n \leq 540 &\Leftrightarrow 100 \times 0,9^n + 520 \leq 540 \\ &\Leftrightarrow 100 \times 0,9^n \leq 20 \\ &\Leftrightarrow 0,9^n \leq 0,2 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,9^n) \leq \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,9) \leq \ln(0,2) \\ &\Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)} \text{(on a divisé par un nombre négatif)} \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)} \approx 15,3$. Comme on travaille avec des nombres entiers, la solution de l'inéquation est : $n \geq 16$

c) Dans le contexte de l'énoncé, ceci signifie que le quotidien sera en difficulté financière à partir de 2011+16 = 2027.

Exercice 4 : (5 points)

Partie A

1. **[0,5pt]**La chaîne A-B-E-H-K-J-G-D-A-C-F-I est composée de tous les sommets du graphe donc entre deux sommets quelconques du graphe il existe une chaîne les reliant.

Par conséquent, ce graphe est connexe.

On a de plus le tableau des degrés suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Degré	3	3	4	3	4	6	3	3	3	3	3

Le graphe est connexe mais il admet 8 sommets de degré impair donc il n'admet pas de chaîne eulérienne.

2. a) **[1pt : 0,25pt pour chaque valeur]**

La matrice d'adjacence d'un graphe est composée de 0 et de 1. On met un 0 à la ligne i et la colonne j s'il n'existe pas d'arête entre le sommet numéro i et le sommet numéro j. S'il y en a une, on met 1.

$a = m_{34}$. Ce coefficient correspond au nombre d'arêtes reliant les sommets C et D. Or ces sommets ne sont pas adjacents. Donc $a = 0$.

$b = m_{47}$. Ce coefficient correspond au nombre d'arêtes reliant les sommets D et G. Or ces sommets sont adjacents. Donc $b = 1$.

$c = m_{95}$. Ce coefficient correspond au nombre d'arêtes reliant les sommets I et E. Or ces sommets sont adjacents. Donc $c = 1$.

$d = m_{11;5}$. Ce coefficient correspond au nombre d'arêtes reliant les sommets K et E. Or ces sommets ne sont pas adjacents. Donc $d = 0$.

b) **[0,5pt]** Le nombre de chemin reliant les sommets A et J est donné par le coefficient $m_{1;10}^{(3)}$ de la matrice M^3. Or $m_{1;10}^{(3)} = 5$.

Donc il existe 5 chaînes de longueur 3 reliant les sommets A et J qui sont :

A-D-G-J ; A-C-G-J ; A-D-F-J ; A-C-F-J et A-B-F-J.

Partie B **[2,5pt : Tableau 1,75pt + chaîne 0,5pt et longueur 0,25pt]**
Déterminons le chemin de longueur minimale entre les sommets A et K à l'aide de l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	Choix
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
	2(A)	5(A)	3(A)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	B (2)
		5(A)	3(A)	8(B)	4(B)	∞	∞	∞	∞	∞	D (3)
		5(A)		8(B)	4(B)	8(D)	∞	∞	∞	∞	F(4)
		5(A)		8(B)		8(D)	7(F)	8(F)	9(F)	∞	C(5)
				8(B)		8(D)	7(F)	8(F)	9(F)	∞	H(7)
				8(B)		8(D)		8(F)	9(F)	9(H)	E(8)
						8(D)		8(F)	9(F)	9(H)	G(8)
								8(F)	9(F)	9(H)	I(8)
									9(F)	9(H)	K(9)

D'après l'algorithme de Dijkstra, le chemin le plus court entre le sommet A et le sommet K est A-B-F-H-K dont la longueur est de 9 km.