Nom : **Prénom :** **TES**

BAC BLANC DE MATHÉMATIQUES N°2

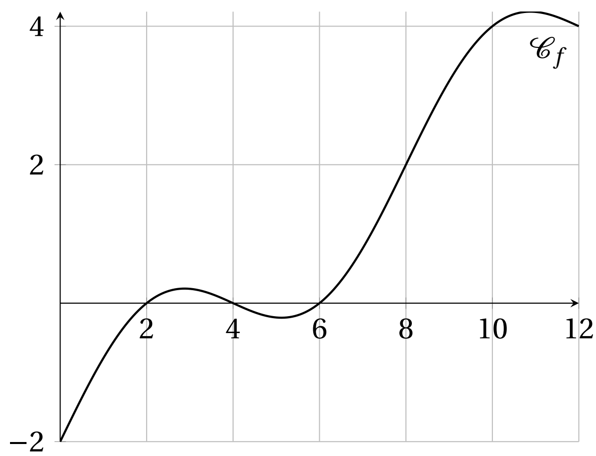
(Durée : 3 heures)

Exercice 1 : (5 points)

Partie A

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule réponse est correcte. Entourer la bonne réponse. Une bonne réponse apportera 1 point ; une mauvaise réponse et l'absence de réponse ne seront pas pénalisées. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;12]$, dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Les intervalles sur lesquels f est convexe sont :

a) $[0;3]$ et $[5;11]$ **b)** $[0;4]$ et $[8;12]$ **c)** $[4;8]$ **d)** $[3;5]$ et $[11;12]$

2. Une primitive de $4xe^{x^2}$ est :

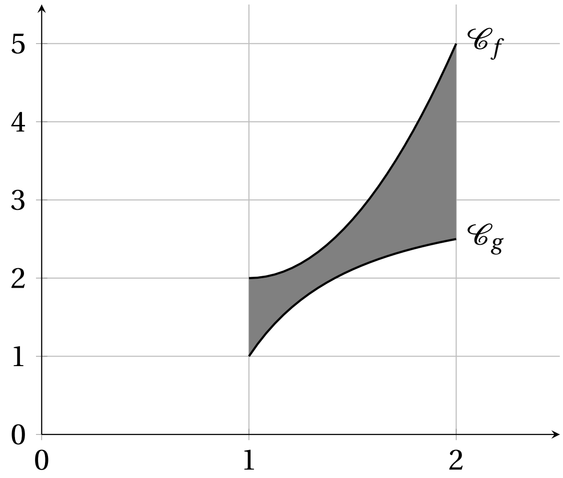
a) $2x^2e^{\frac{x^3}{3}}$ **b)** $8x^2e^{x^2}$ **c)** $2e^{x^2}$ **d)** Aucune de ces réponses

Partie B

On considère la fonction $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ définie sur $[1\,;2]$, et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

On considère également une fonction g, définie sur $[1\,;2]$, dont la représentation graphique est également donnée ci-dessous.

On indique qu'une primitive de g est $G(x) = \dfrac{2-x}{x} + 3x$.



1. Donner toutes les primitives de f.

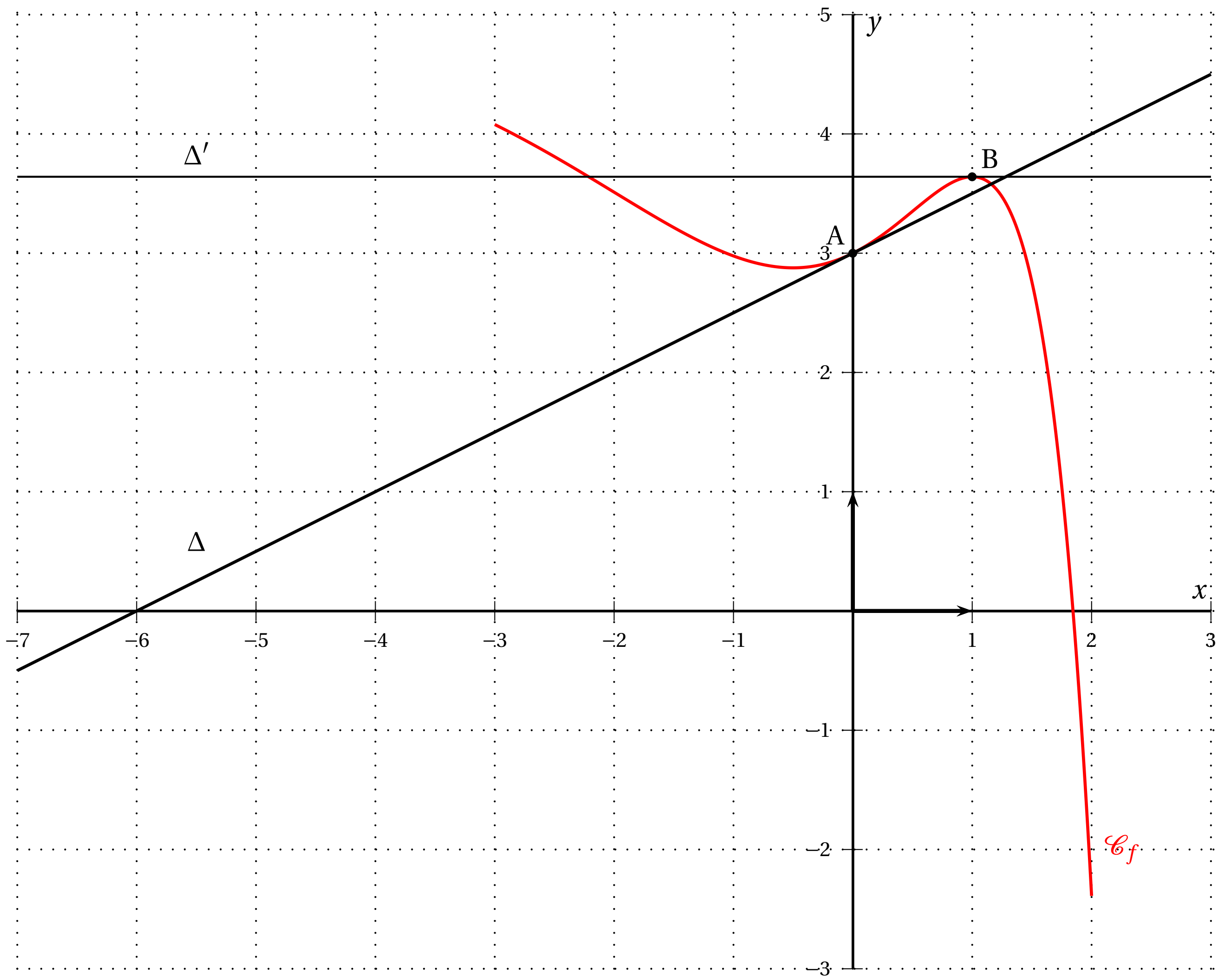
2. Exprimer $g(x)$ en fonction de x

3. Calculer l'aire colorée sur le diagramme. On donnera une valeur exacte.

Exercice 2 : (5 points)

Partie A

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point A de coordonnées $(0 ; 3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.



On dispose des informations suivantes :

- la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3\,;\,-0,5]$ et $[1\,;\,2]$ et elle est strictement croissante sur $[-0,5\,;\,1]$;
- la droite Δ d'équation $y = 0,5x + 3$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A ;
- la tangente Δ' à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Chaque réponse devra être justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(1)$.

2. Quel est le signe de $f'(-2)$?

3. Donner la valeur de $f'(0)$.

4. Le point A est-il un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$?

5. Déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On admet qu'il existe trois réels a, b et c pour lesquels la fonction f représentée dans la partie A est définie, pour tout réel x de $[-3\,;\,2]$, par :

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x + 5.$$

1. En utilisant l'un des points du graphique, justifier que $c = -2$.

2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3\,;\,2]$, par :

$$f'(x) = \left(ax^2 + (2a+b)x - 2 + b\right)\mathrm{e}^x.$$

En utilisant les résultats de la partie A, justifier que $b = 2,5$ puis que $a = -1$.

Partie C

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[-3\,;\,2]$ par

$$f(x) = \left(-x^2 + 2,5x - 2\right)\mathrm{e}^x + 5.$$

1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,2]$

$$f'(x) = \left(-x^2 + 0,5x + 0,5\right)\mathrm{e}^x.$$

2. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $[-3\,;\,2]$.

3. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,;\,2]$.

b) Donner la valeur de α arrondie au centième.

Exercice 3 : **(5 points)** Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A, la destination G et la destination M.
50 % des clients choisissent la destination A ;
30 % des clients choisissent la destination G ;
20 % des clients choisissent la destination M.
Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.
Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G.
On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.
On note les évènements :

- A : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A » ;
- G : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G » ;
- M : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M » ;
- S : « le questionnaire est celui d'un client satisfait » ;
- $\overline{S}$ « le questionnaire est celui d'un client insatisfait ».

1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.

2. **a)** Traduire par une phrase les évènements $G \cap S$ et $M \cap S$ puis calculer les probabilités $P(G \cap S)$ et $P(M \cap S)$.

b) L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. Déterminer $P(A \cap S)$.

c) Le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A. Quelle est la probabilité qu'il soit satisfait ?

3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait.
Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie.
Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (*on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible*).

4. On prélève successivement au hasard 20 questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants. On considère la variable aléatoire X qui représente le nombre de clients satisfaits.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer la probabilité de l'évènement : « cinq exactement des questionnaires sont ceux de clients insatisfaits » (*on donnera le résultat arrondi au millième*).

c) À l'aide de la calculatrice, donner la probabilité qu'au moins 7 des clients sont satisfaits. (*on donnera le résultat arrondi au dix millième*).

Exercice 4 : **(5 points)** La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.
On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$.

2. On propose, ci-dessous, un algorithme.

```
U ← 42
N ← 0
Tant que U < 100
    U ← U × 0,95 + 6
    N ← N + 1
Fin du Tant que
```

a) À l'aide de votre calculatrice, déterminer quelle est la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

b) Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0,95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et préciser son premier terme w_0.

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $w_n = -38 \times (0,95)^n$.

a) Déterminer la limite de (w_n).

b) En déduire la limite de (v_n).

c) Interpréter ce résultat.

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DU BAC BLANC N°2

Exercice 1 : (5 points)

Partie A

1. **[1pt]** Les tangentes semblent être en dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[4\ ;\ 8]$. Donc sur $[4\ ;\ 8]$ la fonction semble convexe.

   Réponse **c)**

2. **[1pt]** On sait que $F' = f$. Il faut donc dériver les fonctions proposées afin de déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto 4xe^{x^2}$.
   Or $\left(2e^{x^2}\right)' = 2 \times 2xe^{x^2} = 4xe^{x^2}$.
   Réponse **c)**

Partie B

1. **[1pt]** f est continue sur $[1\ ;\ 2]$ car c'est un polynôme. Elle admet donc des primitives.

$$\forall x \in [1\ ;\ 2], F(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

2. **[1pt]** On sait que $G' = g$
   G est dérivable sur $[1\ ;\ 2]$ car c'est la somme d'une fonction rationnelle et d'une fonction linéaire qui sont dérivables sur $[1\ ;\ 2]$.
   $\forall x \in [1\ ;\ 2], G'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 3$
   Ainsi,

$$\forall x \in [1\ ;\ 2], g(x) = -\frac{2}{x^2} + 3$$

3. **[1pt]** L'aire du domaine colorié correspond à $\displaystyle\int_1^2 [f(x) - g(x)]\,dx$

   Calcul de l'aire

$$\begin{aligned}
\int_1^2 [f(x) - g(x)]\,dx &= [F(x) - G(x)]_1^2 \\
&= \left[x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{2-x}{x} - 3x\right]_1^2 \\
&= \left[x^3 - 3x^2 + 2x - \frac{2-x}{x}\right]_1^2 \\
&= 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - \frac{2-2}{2} - 1^3 + 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + \frac{2-1}{1} \\
&= 8 - 12 + 4 - 0 - 1 + 3 - 2 + 1 \\
&= 1\ \ u.a
\end{aligned}$$

Exercice 2 : (5 points)

Partie A

1. **[0,25pt]** La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale donc $f'(1) = 0$.
2. **[0,25pt]** La fonction f semble être décroissante sur l'intervalle $[-3\ ;\ -0,5[$ donc $f'(-2) < 0$.
3. **[0,25pt]** $f'(0)$ est le coefficient directeur de la droite Δ. Donc $f'(0) = 0,5$.
4. **[0,25pt]** Les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-0,5\ ;\ 0,5]$ semble être sous la courbe (fonction convexe). Le point A n'est donc pas un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5. **[0,5pt]** $\int_0^1 f(x)dx$ correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Ce domaine contient un rectangle de dimension 1×3 et est contenu dans un rectangle de dimension 1×4.

Donc $3 \leqslant \int_0^1 f(x)dx \leqslant 4$.

Partie B

1. **[0,75pt]** On sait que $f(0) = 3$

Or $f(0) = c + 5$

Donc $c + 5 = 3 \Leftrightarrow c = -2$

2. **[0,75pt]** On sait que $f'(0) = 0,5$

Or $f'(0) = -2 + b$

Donc $-2 + b = 0,5 \Leftrightarrow b = 2,5$

On sait également que $f'(1) = 0$

Or $f'(1) = (a + 2a + b - 2 + b)e^1 = (3a + 2b - 2)e$

Par conséquent, $3a + 2 \times 2,5 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Partie C

1. **[0,5pt]** f est dérivable sur $[-3 ; 2]$ car c'est le produit de fonctions dérivables sur $[-3 ; 2]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x + 2,5)e^x + (-x^2 + 2,5x - 2)e^x \\ &= (-2x + 2,5 - x^2 + 2,5x - 2)e^x \\ &= (-x^2 + 0,5x + 0,5)e^x \end{aligned}$$

2. **[0,75pt]** La fonction exponentielle est strictement positive.

Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que de celui de $-x^2 + 0,5x + 0,5$.

C'est un polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 0,5$ et $c = 0,5$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 2,25 > 0$

Ce polynôme possède donc deux racines réelles :

$x_1 = \dfrac{-0,5 - \sqrt{2,25}}{-2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-0,5 + \sqrt{2,25}}{-2} = -0,5$

Puisque $a = -1 < 0$, on obtient le tableau de signes et de variations suivant :

x	-3		$-\frac{1}{2}$		1		2
Signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$f(-3)$	$\searrow$	$f(-0,5)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$

Avec $f(-3) = -18,5e^{-3} + 5$, $f(-0,5) = -3,5e^{-0,5} + 5$, $f(1) = -0,5e + 5$ et $f(2) = -2e^2 + 5$.

3. a) **[0,5pt]** La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[1 ; 2]$

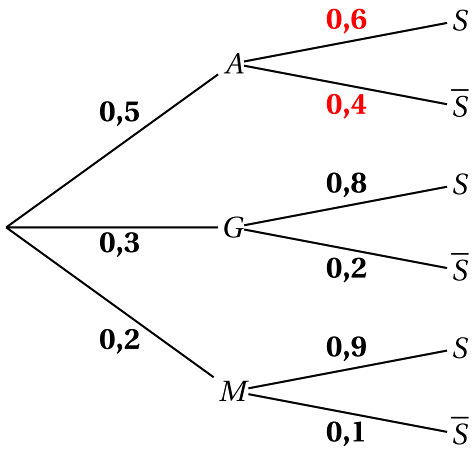
$f(1) = -0,5e + 5 \approx 3,6 > 0$ et $f(2) = -2e^2 + 5 \approx -2,4 < 0$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution, notée α, sur $[1 ; 2]$.

b) **[0,25pt]** À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 1,84$.

Exercice 3 : (5 points)

1. **[0,5pt]** L'arbre de probabilité correspondant aux données du problème est :



2. **a)** **[1pt]** $G \cap S$: « Le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G et le client est satisfait ».
   $M \cap S$: « Le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M et le client est satisfait ».
   $P(G \cap S) = P(G) \times P_G(S) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.
   $P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$.

   b) **[1pt]** A, G et M forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(S) = P(A \cap S) + P(G \cap S) + P(M \cap S) \quad &\Leftrightarrow \quad 0,72 = P(A \cap S) + 0,24 + 0,18 \\ &\Leftrightarrow \quad P(A \cap S) = 0,72 - 0,42 \\ &\Leftrightarrow \quad P(A \cap S) = 0,3 \end{aligned}$$

   c) **[0,5pt]** On cherche la probabilité $P_A(S)$.
   D'après la formule de probabilité conditionnelle, on a :

$$P_A(S) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6.$$

3. **[0,5pt]** On cherche la probabilité $P_S(G)$.
   D'après la formule de probabilité conditionnelle, on a :

$$P_S(G) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{0,24}{0,72} = \frac{1}{3}.$$

4. **a)** **[0,5pt]** On est en présence d'une épreuve de Bernoulli (le client est satisfait ou pas) que l'on répète 20 fois de manière indépendante. On obtient un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X qui représente le nombre de clients satisfaits suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,72$.

   b) **[0,5pt]** On cherche à calculer $P(X = 15)$

$$P(X = 15) = \binom{20}{15} \times 0,72^{15} \times (1 - 0,72)^5 \text{ soit } P(X = 15) \approx 0,193.$$

   c) **[0,5pt]** On cherche à déterminer $P(X \geqslant 7)$

$$P(X \geqslant 7) = 1 - P(X \leqslant 6) \text{ soit } P(X \geqslant 7) \approx 0,9999.$$

Exercice 4 :

Partie A

1. **[0,5pt]** Baisser une quantité de 5% revient à multiplier cette quantité par 0,95.
Ainsi, si u_n représente le nombre d'ouvrages l'année 2013+n alors l'année suivante la médiathèque conservera $u_n \times 0,95$ ouvrages et à cela on rajoute les 6 milliers d'ouvrages neufs.
Donc l'année 2013+$(n+1)$, la médiathèque contiendra $u_n \times 0,95+6$ milliers d'ouvrages.
Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times 0,95+6$$

2. a) **[0,5pt]** À l'aide de la calculatrice, on obtient $u_{26} \approx 99,45$ et $u_{27} \approx 100,47$.
Donc à la fin de l'execution de cet algorthime la variable N contiendra le nombre 27.

b) **[0,5pt]** C'est au bout de 27 ans i.e en 2040 que la médiathèque disposera au moins de 100 milliers d'ouvrages

Partie B

1. **[0,5pt]** Il faut rectifier la 4ième ligne de l'algorithme précédent pour tenir compte de cette modification.
On doit donc remplacer cette ligne par : $U \leftarrow U \times 0,95+4$.

2. **[1,5pt]** Pour n entier, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 80 \\ &= v_n \times 0,95 + 4 - 80 \\ &= v_n \times 0,95 - 76 \\ &= 0,95\left(v_n - \frac{76}{0,95}\right) \\ &= 0,95(v_n - 80) \\ &= 0,95 w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $w_0 = v_0 - 80 = 42 - 80 = -38$.

3. a) **[0,5pt]** (w_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
Or $0,95 \in]0\,;\,1[$.
Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$$

b) **[0,5pt]** On sait que $w_n = v_n - 80$ donc $v_n = w_n + 80$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 80 = 80$.
Donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 80$.

c) **[0,5pt]** Selon ce nouveau modèle, à long terme la médiathèque disposera au plus 80 milliers d'ouvrages chaque année.