# 1 Exercice 1

*Remarque :* ces questions étaient données dans des ordres différents selon les sujets.

1. *Nombre de solutions de* $x^2 = 5(10-x)$

$$\begin{aligned} x^2 = 5(10-x) &\Leftrightarrow x^2 = 50 - 5x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x - 50 = 0 \end{aligned}$$

Or, $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-50) = 225 > 0$. Ainsi, l'équation admet deux solutions.

2. *Vecteur colinéaire à* $\overrightarrow{u}(3;9)$

$$\left(\frac{1}{3};1\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{u}$$

Ainsi, $\left(\frac{1}{3};1\right)$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$

3. *Maximum de* $f : x \mapsto x^2 + 6x + 5$
Le coefficient dominant $a = 1$ est positif ; ainsi, $f$ est d'abord décroissante puis croissante. Elle admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$, mais pas de maximum. Ainsi, aucune des réponses ne convenait.

4. *Dérivée de* $g : x \mapsto 3(x+1)\sqrt{x}$
On définit : $\begin{array}{lcl} u(x) = x+1 & \text{et} & v(x) = \sqrt{x} \\ u'(x) = 1 & & v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}$
$g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle ; et on a, $\forall x \in ]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \\ &= 3\left(\sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= 3 \times \frac{2x+x+1}{2\sqrt{x}} \\ g'(x) &= \frac{9x+3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

5. *Premier terme plus grand que 10000 de* $u_n$
Remarque : $u_{n+1} - u_n = n - 6$. Ainsi, $(u_n)$ est croissante à partir du rang 6 ; et si on trouve un terme $u_k > 10000 (k \geq 6)$, il en sera de même pour tous les termes suivants.
A l'aide de la calculatrice, on trouve $u_{148} = 9993$ et $u_{149} = 10135$. Ainsi, $u_n$ dépasse 10000 à partir du rang $n = 149$

# 2 Exercice 2

1. Les dimensions du rectangle sont les coordonnées de $M$. Or, comme $M$ est sur $\mathcal{C}_f$, son ordonnée est l'image de son abscisse : ainsi, $M$ a pour coordonnées $(x; f(x))$.
On en déduit que l'aire du rectangle vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= x \times f(x) \\ \mathcal{A}(x) &= \frac{x}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

2. a) On définit : $\begin{array}{lcl} u(x) = x & \text{et} & v(x) = x^2 - x + 1 \\ u'(x) = 1 & & v'(x) = 2x - 1 \end{array}$
*Valeur interdite* : Cherchons les racines de $v(x) = x^2 - x + 1$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Ainsi, $v(x) \neq 0 \ \forall x \in [0;+\infty[$
Donc, $\mathcal{A} = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, et on a, $\forall x \in [0;+\infty[$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}\\ &= \frac{x^2-x+1-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}\\ &= \frac{x^2-x+1-2x^2+x}{(x^2-x+1)^2}\\ \mathcal{A}'(x) &= \frac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}\end{aligned}$$

b) On a vu à la question précédente que le dénominateur de $\mathcal{A}'$ est strictement positif. Pour étudier le signe du numérateur, on peut remarquer que

$$-x^2+1=(1-x)(1+x)$$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

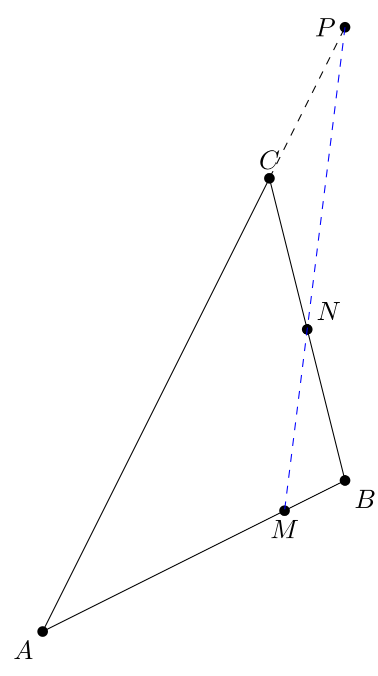
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-x^2+1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| signe de $(x^2-x+1)^2$ | | $+$ | | $+$ | |
| signe de $\mathcal{A}'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| variations de $\mathcal{A}(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | |

*Calculs des valeurs de $\mathcal{A}$ :* $\mathcal{A}(0)=\frac{0}{0^2-0+1}=0$ et $\mathcal{A}(1)=\frac{1}{1^2-1+1}=1$

3. Ainsi, pour obtenir l'aire maximale, il faut que $x=1$. Ceci correspond à une ordonnée de $f(1)=\frac{1}{1^2-1+1}=1$.
   $M$ doit avoir pour coordonnées $(1\,;1)$ pour obtenir une surface maximale.

# 3 Exercice 3

1. Voici la figure :



2. *Coordonnées des points M et N dans le repère* $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{5}\overrightarrow{BA} \end{aligned}$$

Donc $M$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{5}; 0\right)$.

De plus, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, donc $N$ a pour coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

3. a) On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Donc, les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $(-1; 1)$.

   b)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

   On en déduit que $P$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$

4. A partir des coordonnées des points données ci-dessus, on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\ \frac{4}{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{15} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

   Ainsi :

$$det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = -\frac{1}{5} \times \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{8}{15}\right) = 0$$

   On en déduit que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires ; et donc que $M, N$ et $P$ sont alignés.

# 4 Exercice 4

1. On calcule les images :

$$\begin{aligned} f(-4) &= \left|\frac{3}{4} \times (-4) - \frac{3}{2}\right| - \left|\frac{1}{2} \times (-4) + \frac{1}{2}\right| \\ &= \left|-\frac{9}{2}\right| - \left|-\frac{3}{2}\right| \\ &= \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \\ f(-4) &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= \left|\frac{3}{4} \times (0) - \frac{3}{2}\right| - \left|\frac{1}{2} \times (0) + \frac{1}{2}\right| \\ &= \left|-\frac{3}{2}\right| - \left|\frac{1}{2}\right| \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

2. D'une part :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\geq 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{4}x\geq\frac{3}{2}\\ &\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\\ &\Leftrightarrow x\geq 2\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\geq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x\geq-\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x\geq-\frac{1}{2}\times 2\\ &\Leftrightarrow x\geq -1\end{aligned}$$

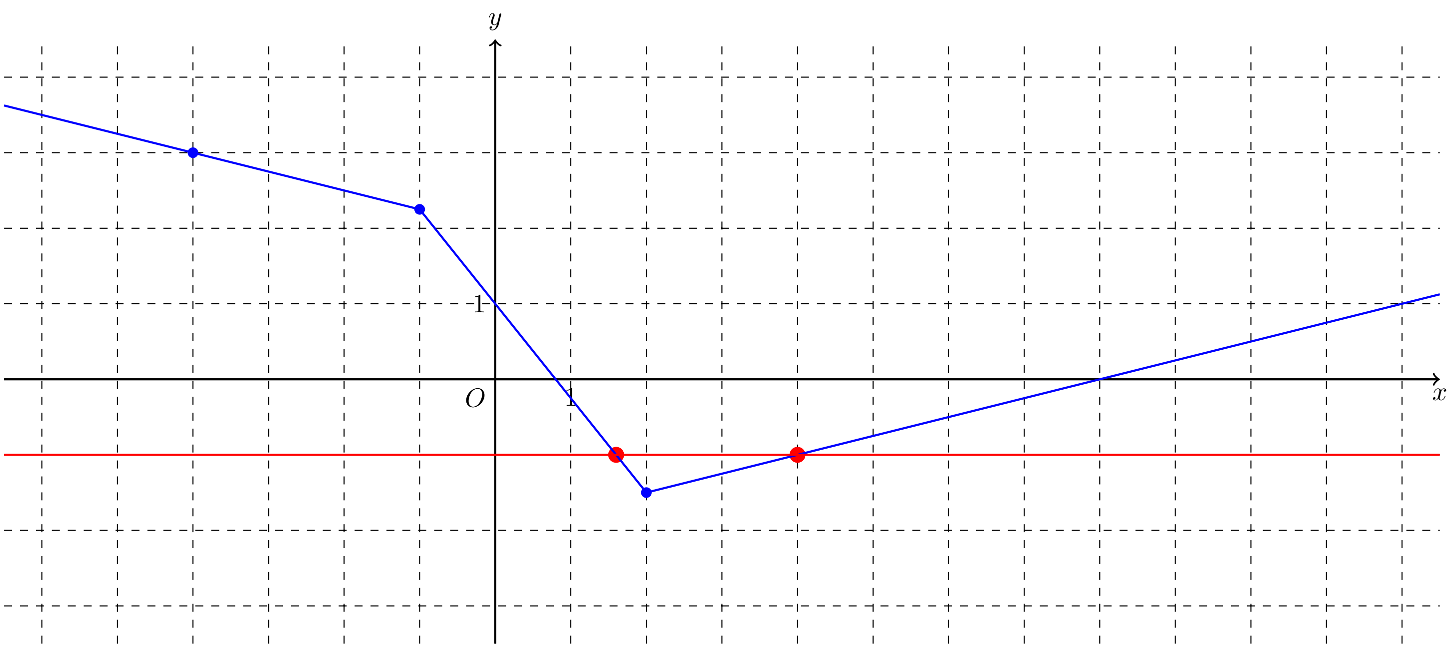
On en déduit le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | -1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left\lvert\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right\rvert$ | $-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ | | $-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ | 0 | $\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$ |
| $\left\lvert\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right\rvert$ | $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{4}x+2$ | | $-\frac{5}{4}x+1$ | | $\frac{1}{4}x-2$ |

Ainsi :

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}x+2 & \text{si } x\leq -1\\ -\frac{5}{4}x+1 & \text{si } -1<x\leq 2\\ \frac{1}{4}x-2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

3. On a $f(-4)=3$ (question 1), $f(-1)=-\frac{1}{4}\times(-1)+2=\frac{9}{4}$, $f(2)=\frac{1}{4}\times 2-2=-\frac{3}{2}$ et $f(8)=\frac{1}{4}\times 8-2=0$. Ces valeurs permettent de tracer :




4. a) Graphiquement (les traits et points rouges sur le graphique), on obtient la solution de $f(x)=-1$ :

$$S=\{1,6;4\}$$

b) On procède par disjonction de cas :

— Si $x \leq -1$

$$\begin{aligned} f(x)=1 &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x+2=1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x=-1 \\ &\Leftrightarrow x=4 \end{aligned}$$

Or, $4 > -1$, donc cette solution ne convient pas.

— Si $-1 < x \leq 2$

$$\begin{aligned} f(x)=1 &\Leftrightarrow -\frac{5}{4}x+1=1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{4}x=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

Cette solution convient.

— Si $x > 2$

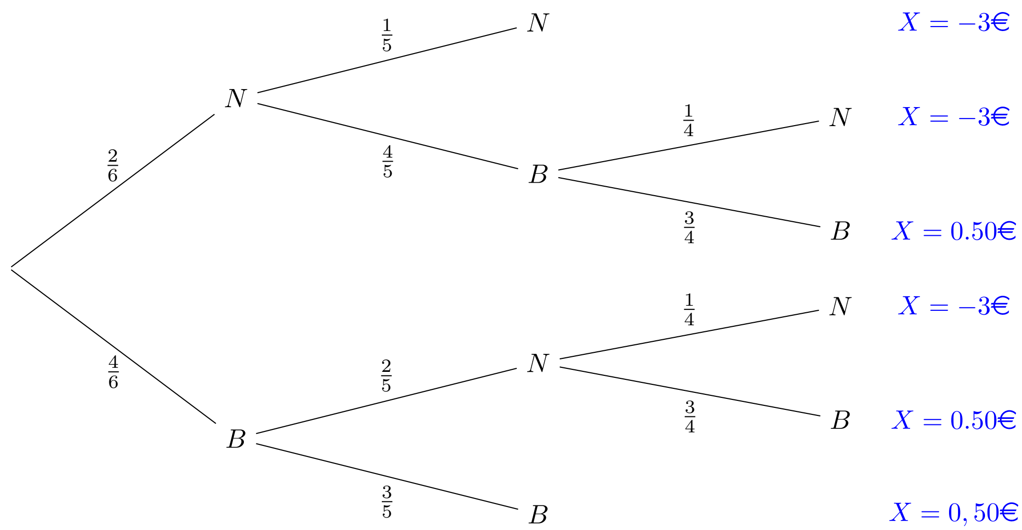
$$\begin{aligned} f(x)=1 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}x-2=1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}x=3 \\ &\Leftrightarrow x=12 \end{aligned}$$

Cette solution convient.

On peut donc conclure : $S=\{0;12\}$

## 5 Exercice 5

1. On note par $N$ et $B$ le fait de tirer respectivement une boule noire et une boule blanche. On a l'arbre suivant :




2. *Loi de probabilité de $X$*
   D'une part,

$$\begin{aligned} P(X=-3) &= \frac{2}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

D'autre part, $P(X=0,50)=1-P(X=-3)=\frac{4}{5}$
On a donc la loi de probabilité suivante :

| $x_i$ | -3 | 0,50 |
|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

3. Calculons l'espérance de $X$ :

$$\begin{aligned} E(X) &= -3\times\frac{1}{5}+0,50\times\frac{4}{5} \\ &= -0,20€ \\ E(X) &< 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le jeu n'est pas équitable, mais défavorable au joueur.

Pour rendre le jeu équitable, on peut remplacer les 3 € de perte du joueur dans le cas où il tire deux boules noires par 2 € de perte. En effet, dans ce cas, $E(X) = -2 \times \frac{1}{5} + 0,50 \times \frac{4}{5} = 0$.

4. Reprenons la loi de probabilité de $X$ :

| | | |
|---|---|---|
| $x_i^2$ | 9 | 0,25 |
| $x_i$ | -3 | 0,50 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E(X^2) & = & 9 \times \dfrac{1}{5} + 0,25 \times \dfrac{4}{5} \\ & = & \dfrac{10}{5} \\ \text{puis } V(X) & = & E(X^2) - E(X)^2 \\ & = & \dfrac{10}{5} - 0.04 \\ V(X) & = & 1,96 \\ \text{et enfin } \sigma(X) & = & \sqrt{V(X)} \\ \sigma(X) & = & 1,4 \end{array}$$